VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

Аннотация

Книга содержит материал семестрового курса, который авторы в течение многих лет читали на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ и в его филиалах в Севастополе и Астане для студентов второго курса. Цель книги – познакомить читателей с численными методами решения основных задач линейной алгебры, математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Книга предназначена для студентов классических университетов, педагогических и технических вузов, специальность которых требует применения компьютерных методов в их будущей профессиональной деятельности.

Предисловие

Книга содержит материал семестрового курса, который авторы в течение многих лет читали на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, а в последние годы и в его филиалах в Севастополе и Астане.

Опыт преподавания показал, что для студентов прикладных специальностей, имеющих дело с компьютерами, весьма полезно приступить к изучению численных методов по возможности раньше, одновременно с приобретением навыков программирования, закрепляя навыки во время работы в компьютерном практикуме. Это способствует более глубокому неформальному усвоению материала как по математике, так и по компьютерным технологиям. Поэтому по инициативе академика А. А. Самарского был разработан и включен в учебный план факультета курс «Вводные лекции по численным методам», который читается в третьем семестре.

Цель курса заключается в том, чтобы рассказать студентам о численных методах, которые появляются с самого начала их обучения в базовых математических курсах - в линейной алгебре, математическом анализе, обыкновенных дифференциальных уравнениях. Такой принцип отбора материала и определил включение в название курса, а теперь и книги термина «Вводные лекции».

Теоретическое обоснование методов проводится на достаточно строгом уровне с доказательством сходимости и оценкой погрешности. Проводится сравнение разных методов решения одной и той же математической задачи, обсуждаются их достоинства и недостатки. Особое внимание обращается на алгоритмические аспекты и организацию вычислительного процесса.

Книга построена таким образом, что ее отдельные главы можно читать независимо. Ссылок на материал предыдущих глав практически нет. Этот принцип выдержан также при техническом оформлении материала: нумерация формул, рисунков, таблиц в каждой главе независимая.

Книга написана, прежде всего, в расчете на будущих специалистов по прикладной математике и информатике, которых сейчас готовят многие университеты и технические вузы. Ею также могут воспользоваться студенты естественных факультетов университетов, педагогических и экономических институтов при знакомстве с численными методами решения базовых математических задач и компьютерной обработкой различного рода информации.

Авторы признательны своему учителю академику Александру Андреевичу Самарскому, под влиянием которого сложился подход и стиль изложения книги. Полезные обсуждения ряда вопросов состоялись с А. В. Гулиным, Г. Д. Ким, С. И. Мухиным. Мы считаем приятным долгом поблагодарить их за это. Благодарим также А. Я. Буничеву, А. В. Леоненко, А. Б Хруленко за большую помощь при подготовке компьютерной версии рукописи.

Оглавление

Глава 1. Численное решение линейных алгебраических систем (СЛАУ).
1. Прямые методы решения СЛАУ.
1.1. Формулы Крамера.
1.2. Метод Гаусса.
1.3. Системы с диагональным преобладанием.
1.4. Системы с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки
2. Обусловленность СЛАУ.
2.1. Норма матрицы.
2.2. Корректность решения СЛАУ.
2.3. Число обусловленности матрицы. Корректность решения СЛАУ.
2.4. Оценка числа обусловленности.
3. Итерационные методы.
3.1. Построение итерационных последовательностей.
3.2. Проблема сходимости итерационного процесса.
3.3. Достаточные условия сходимости итерационного процесса.
3.4. Метод простой итерации.
3.5. Неявные методы. Метод Зейделя.
3.6. Метод верхней релаксации.

Глава 2. Численное решение уравнений.
1. Метод вилки. Теорема о существовании корня непрерывной функции.
2. Метод итераций (метод последовательных приближений).
3. Метод касательных (метод Ньютона).
4. Заключительные замечания.

Глава 3. Приближение функций.
1. Интерполирование
1.1. Классическая постановка задачи интерполирования.
1.2. Интерполирование полиномами.
1.3. Построение интерполяционного полинома в форме Лагранжа.
1.4. Интерполяционный полином в форме Ньютона.
1.5. Погрешность интерполирования.
1.6. О сходимости интерполяционного процесса.
1.7. Интерполяционный полином Эрмита.
2. Интерполирование сплайнами.
2.1. Определение кубического сплайна.
2.2. Формулировка системы уравнений для коэффициентов кубического сплайна.
2.3. Редукция системы.
2.4. Замечание о решении системы.
2.5. Сходимость и точность интерполирования сплайнами.
3. Метод наименьших квадратов.

Глава 4. Численное интегрирование.

1. Формула Ньютона-Лейбница и численное интегрирование.
2. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

2.1. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и их особенности.

2.2. Сходимость и точность квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона.

2.3. Апостериорные оценки погрешности при численном интегрировании.

3. Квадратурные формулы Гаусса.

3.1. Задача построения оптимальных квадратурных формул.

3.2. Полиномы Лежандра.

3.3. Узлы и весовые коэффициенты квадратурных формул Гаусса.

3.4. Исследование квадратурной формулы.

4. Построение первообразной с помощью численного интегрирования.

Глава 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Разностная аппроксимация производных.

1.1. Сеточные функции.

1.2. Разностная аппроксимация первой производной.

1.3. Разностная аппроксимация второй производной.

2. Численное решение задачи Коши.

2.1. Метод Эйлера.

2.2. Повышение точности разностного метода.

2.3. Метод Рунге-Кутта.

2.4. Метод Адамса.

3. Численное решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Подписи под рисунками

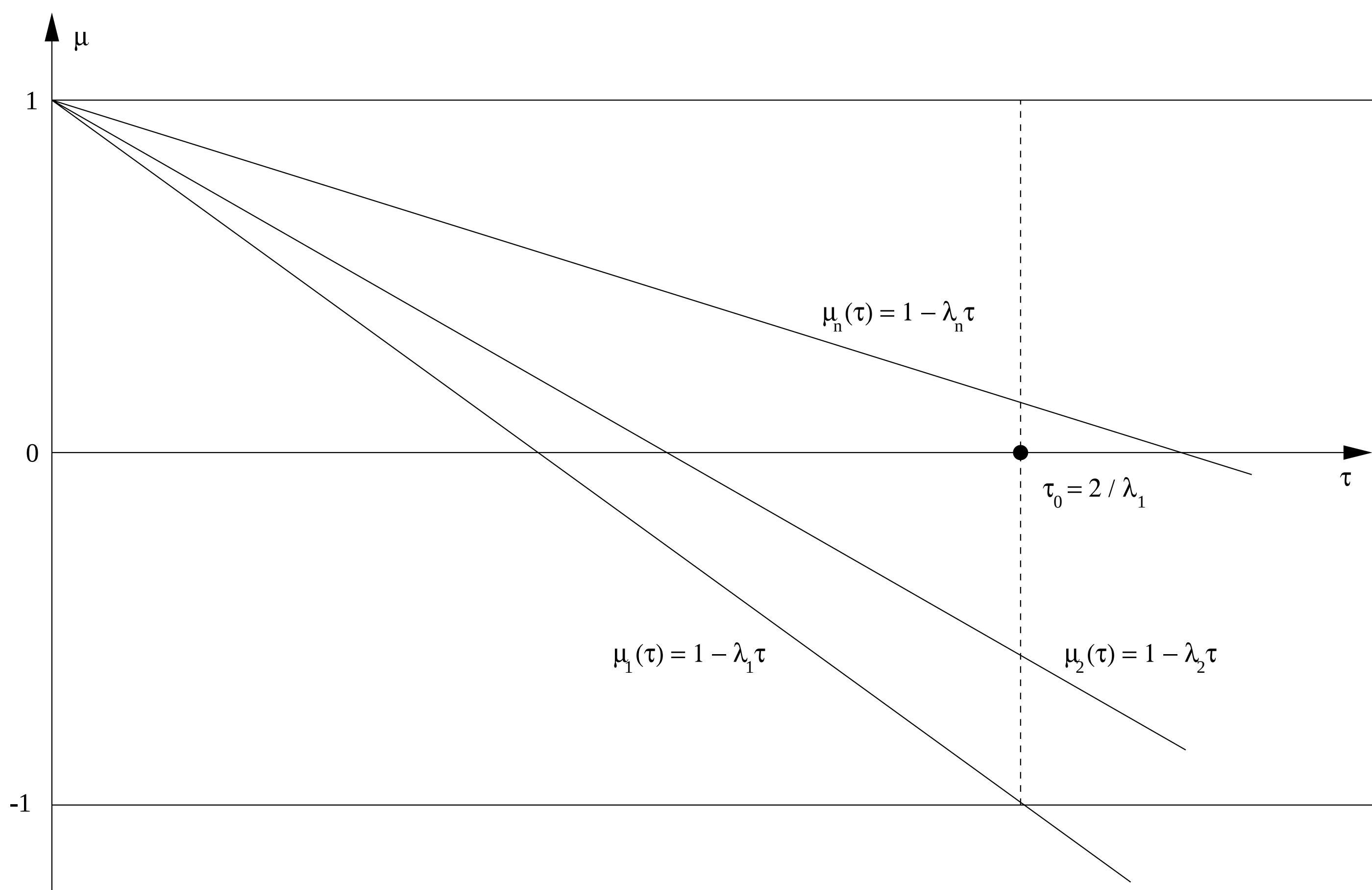
Глава 1.
Рис. 1. Определение границы интервала сходимости τ_0 метода простой итерации.
Рис. 2. Определение оптимального значения итерационного параметра τ_*, при котором скорость сходимости метода простой итерации наибольшая.

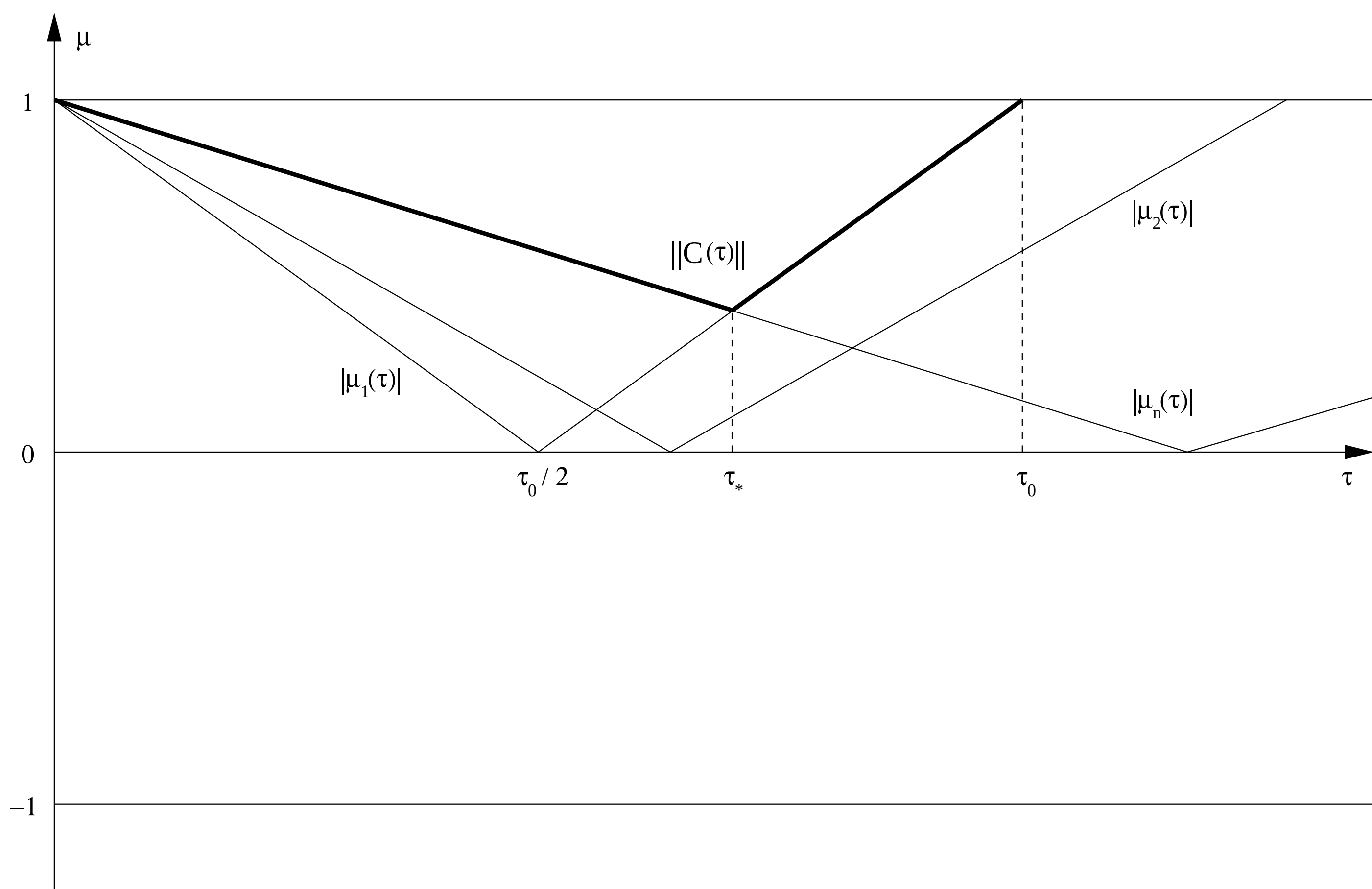
Глава 2.
Рис. 1. График функции $f(x) = x - \cos x$.
Рис. 2. Построение последовательности $\{x_n\}$ по методу касательных.
Рис. 3. Случай, когда процесс построения последовательности $\{x_n\}$ обрывается из-за плохого выбора нулевого приближения.

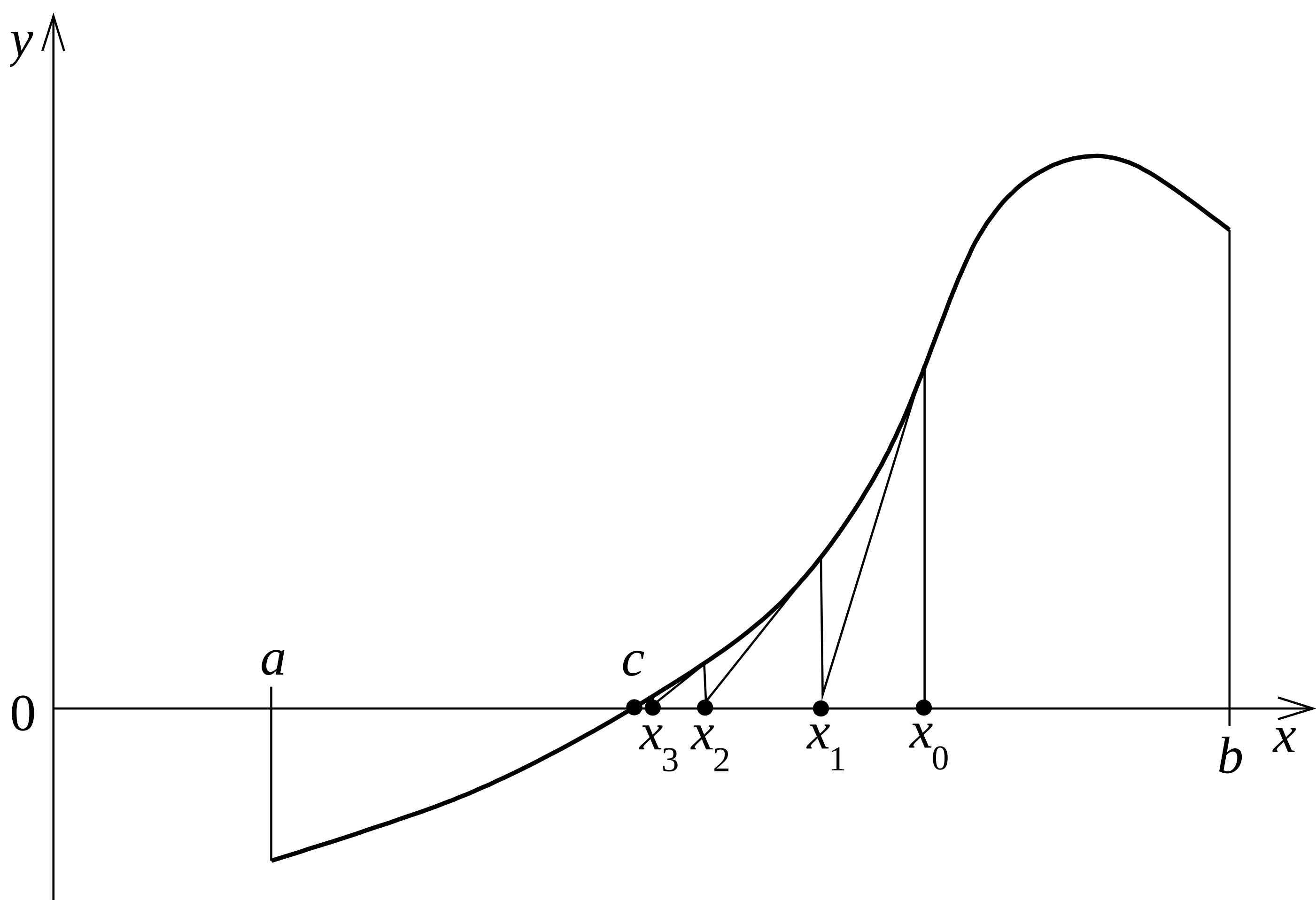
Глава 3.
Рис. 1. Сравнение графиков функции $y = \sin(x)$ (сплошная линия) и интерполяционного полинома $P_2(x)$ (пунктир).
Рис. 2. График функции $\omega_4(x) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$
Рис. 3. Сравнение графиков функции $y = \sin(x)$ (сплошная линия) и интерполяционного полинома $H_2(x)$ (пунктир).
Рис. 4. Сравнение значений функции, приведенной в таблице, и линейной функции $F(x) = 1.004 + 0.984x$. Значения $y_i = f(x_i)$ заданы с погрешностью $\varepsilon = 0.1$.

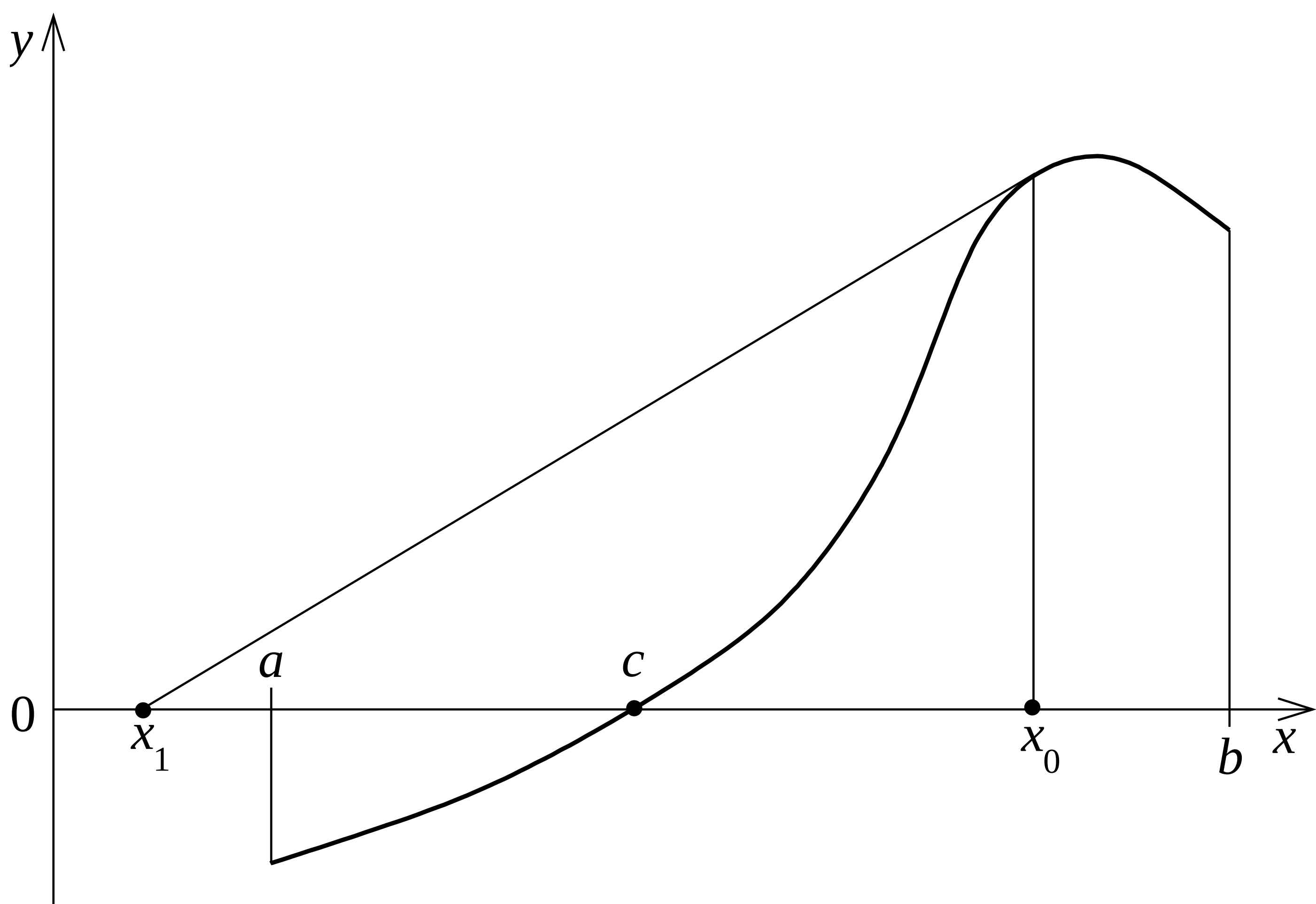
Глава 4.
Рис. 1. Геометрическая интерпретация формулы прямоугольников.
Рис. 2. Геометрическая интерпретация формулы трапеций.
Рис. 3. График интегрального синуса.
Рис. 4. График функции ошибок.

Глава 5.
Рис. 1. Зависимость точности численного решения задачи Коши (51), (52) по схеме Эйлера от шага h. Линии I, II, III соответствуют шагом $h_1 = 0.25$, $h_1 = 0.05$, $h_1 = 0.01$, При выбранном масштабе линия III практически совпадает с графиком аналитического решения задачи (53) (пунктирная линия).

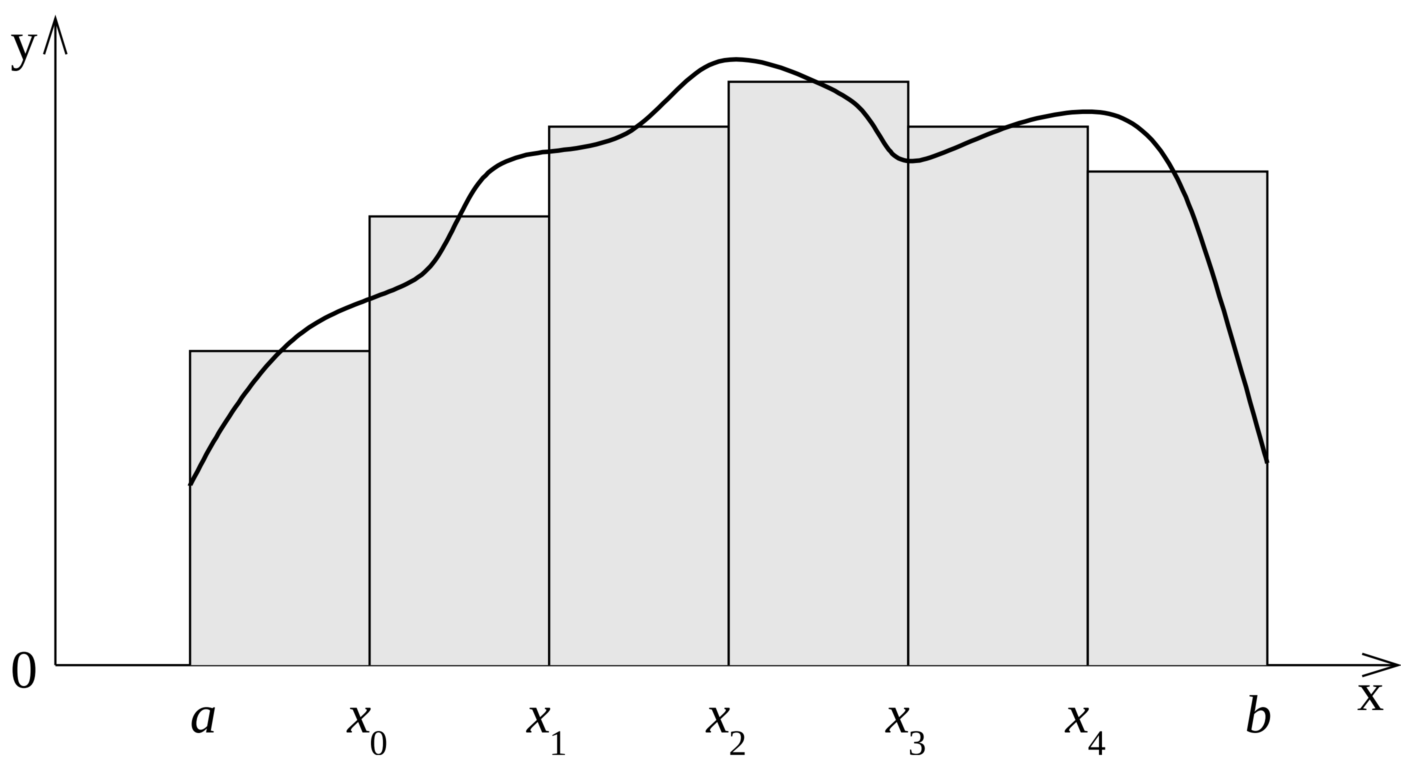

μ
1
0
-1
τ
μn(τ) = 1 − λnτ
τ0 = 2 / λ1
μ1(τ) = 1 − λ1τ
μ2(τ) = 1 − λ2τ

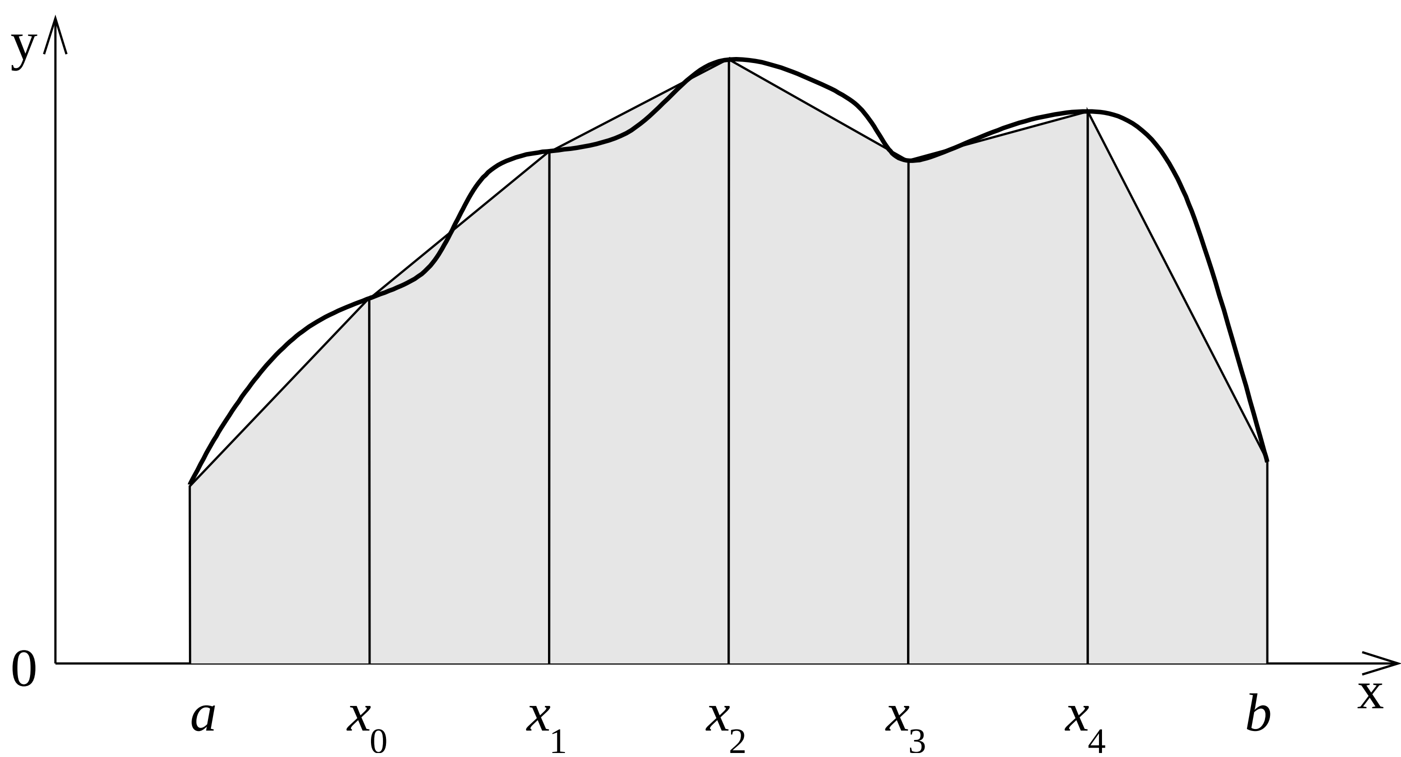

μ
1
0
−1
||C(τ)||
|μ1(τ)|
|μ2(τ)|
|μn(τ)|
τ0 / 2
τ*
τ0
τ

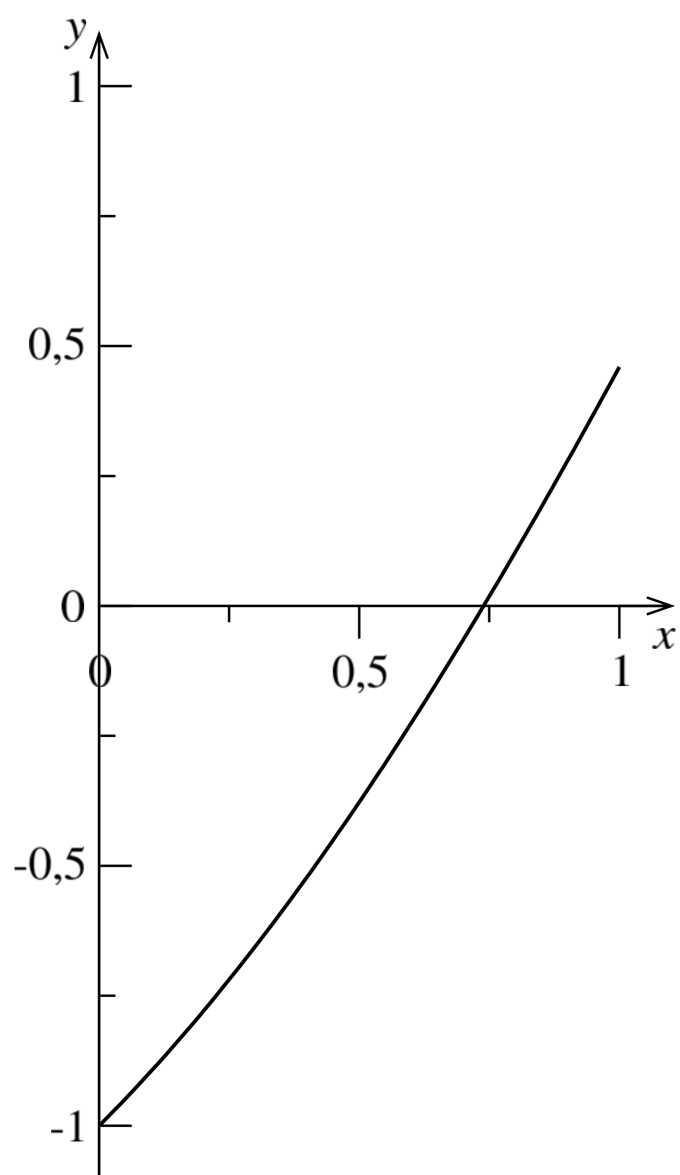

y
0
a
c
x
b
x_3
x_2
x_1
x_0

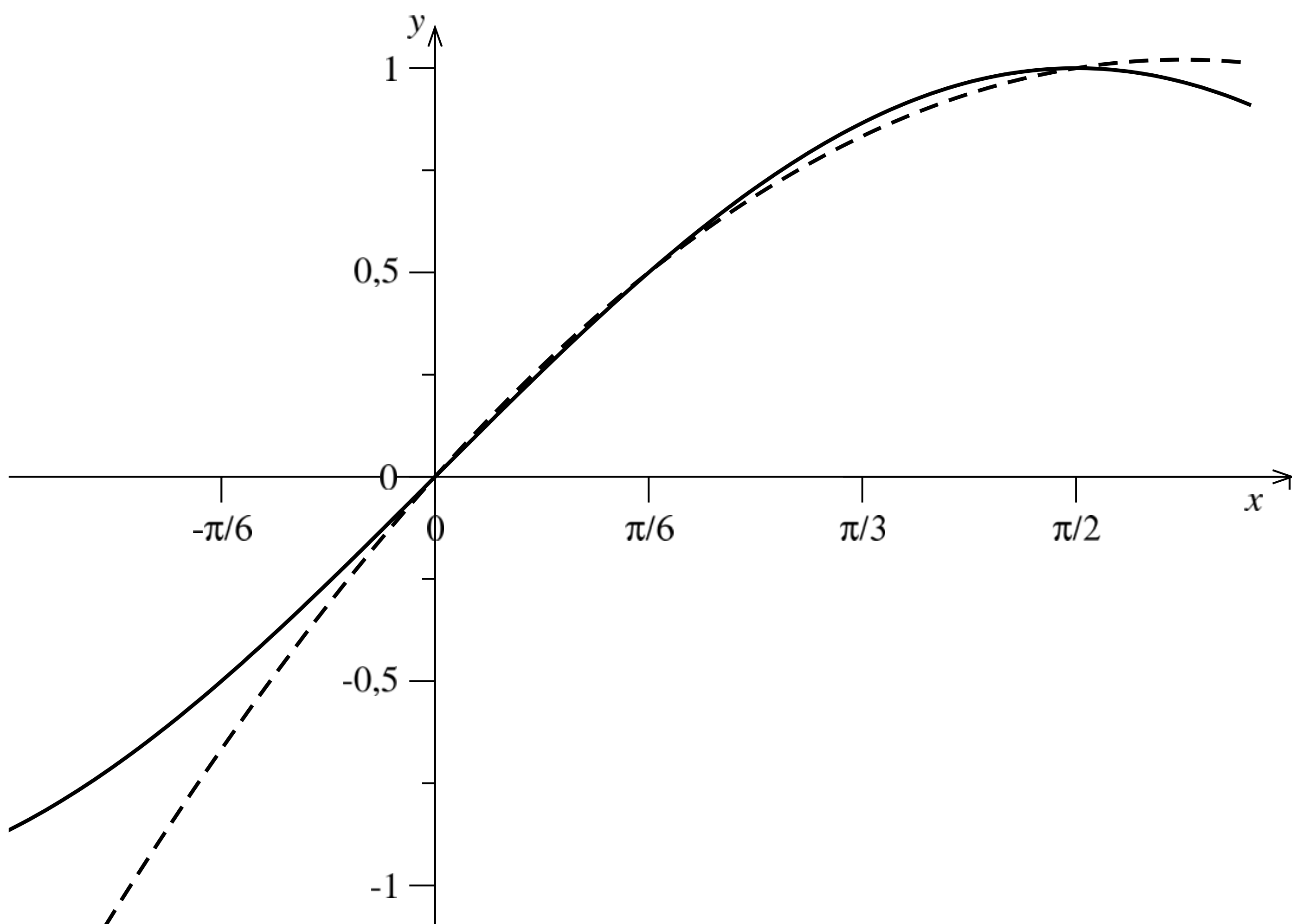


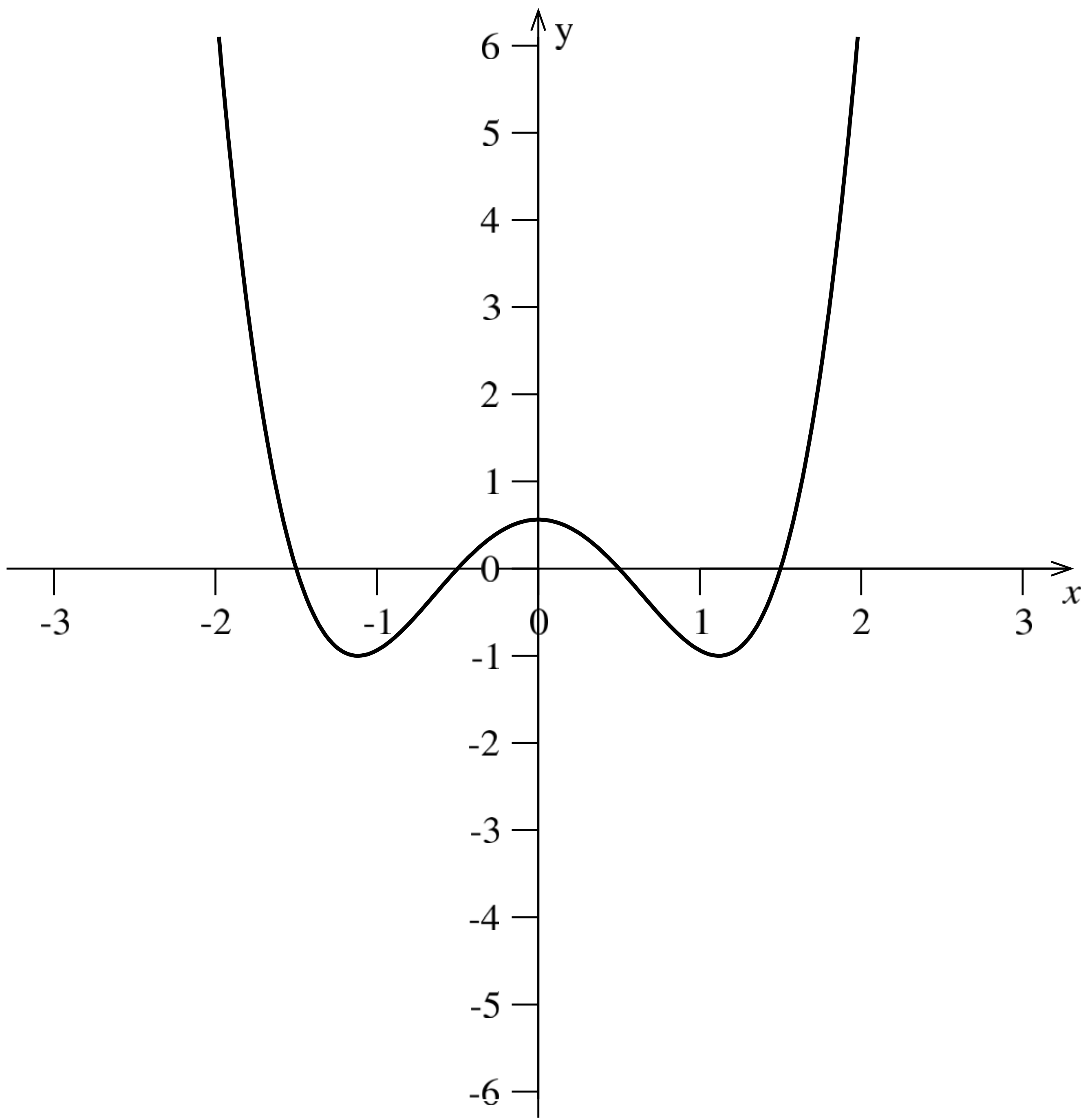
y
0
a
c
x_1
x_0
b
x


y
0
x
a
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
b

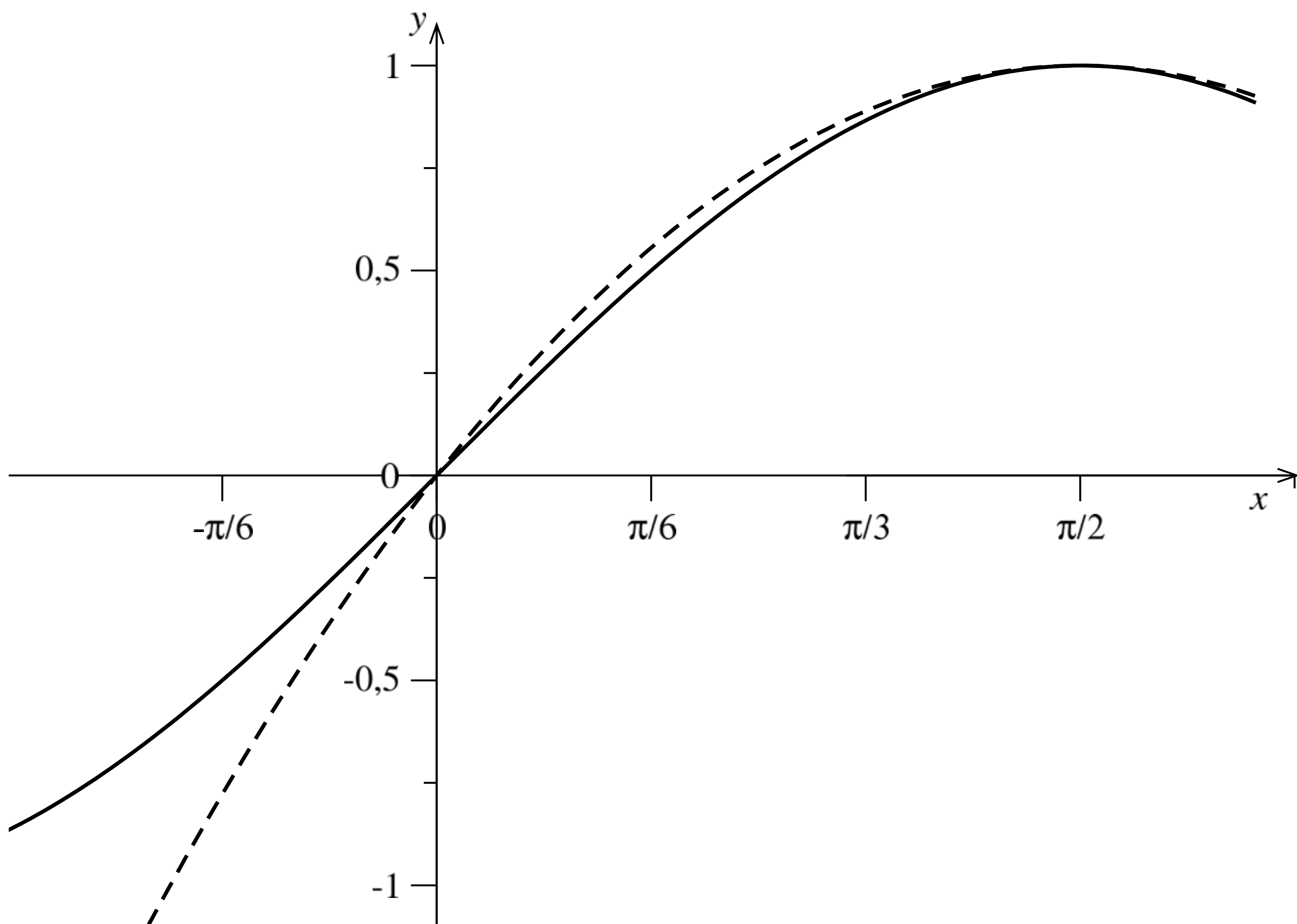

y
0
x
a
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
b

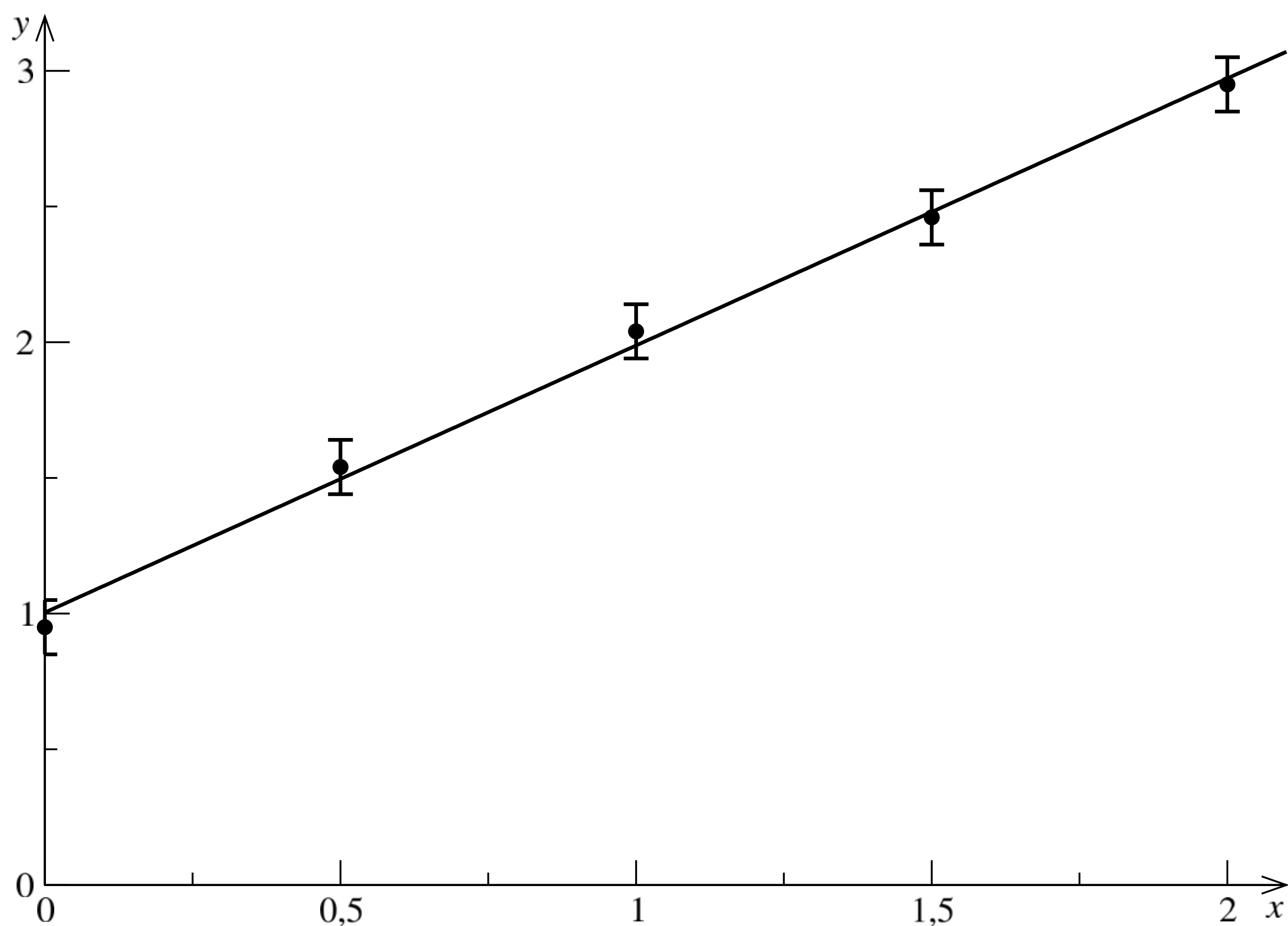

y
1
0,5
0
-0,5
-1
0
0,5
1
x

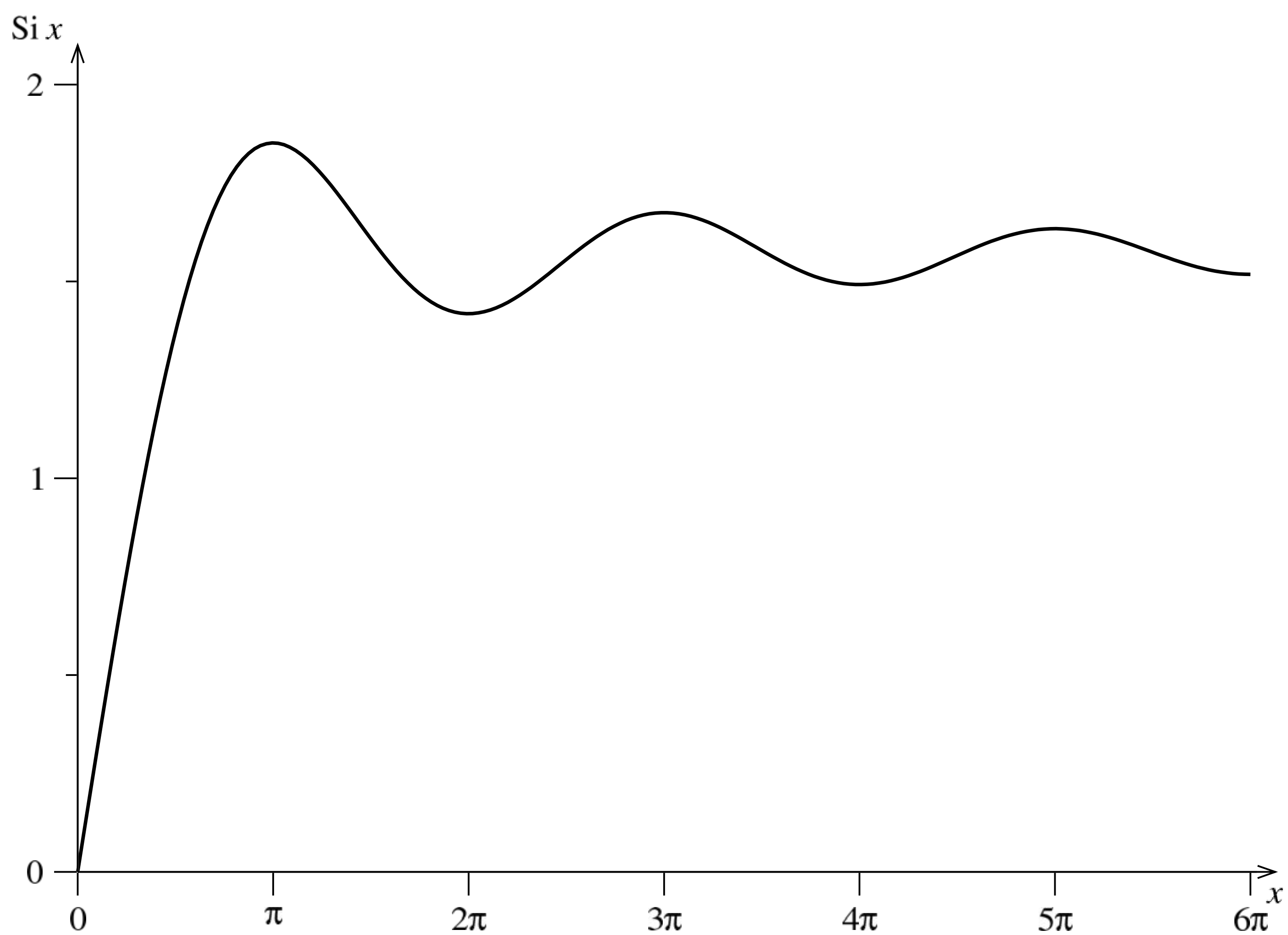

y
1
0,5
0
-0,5
-1
-π/6
0
π/6
π/3
π/2
x

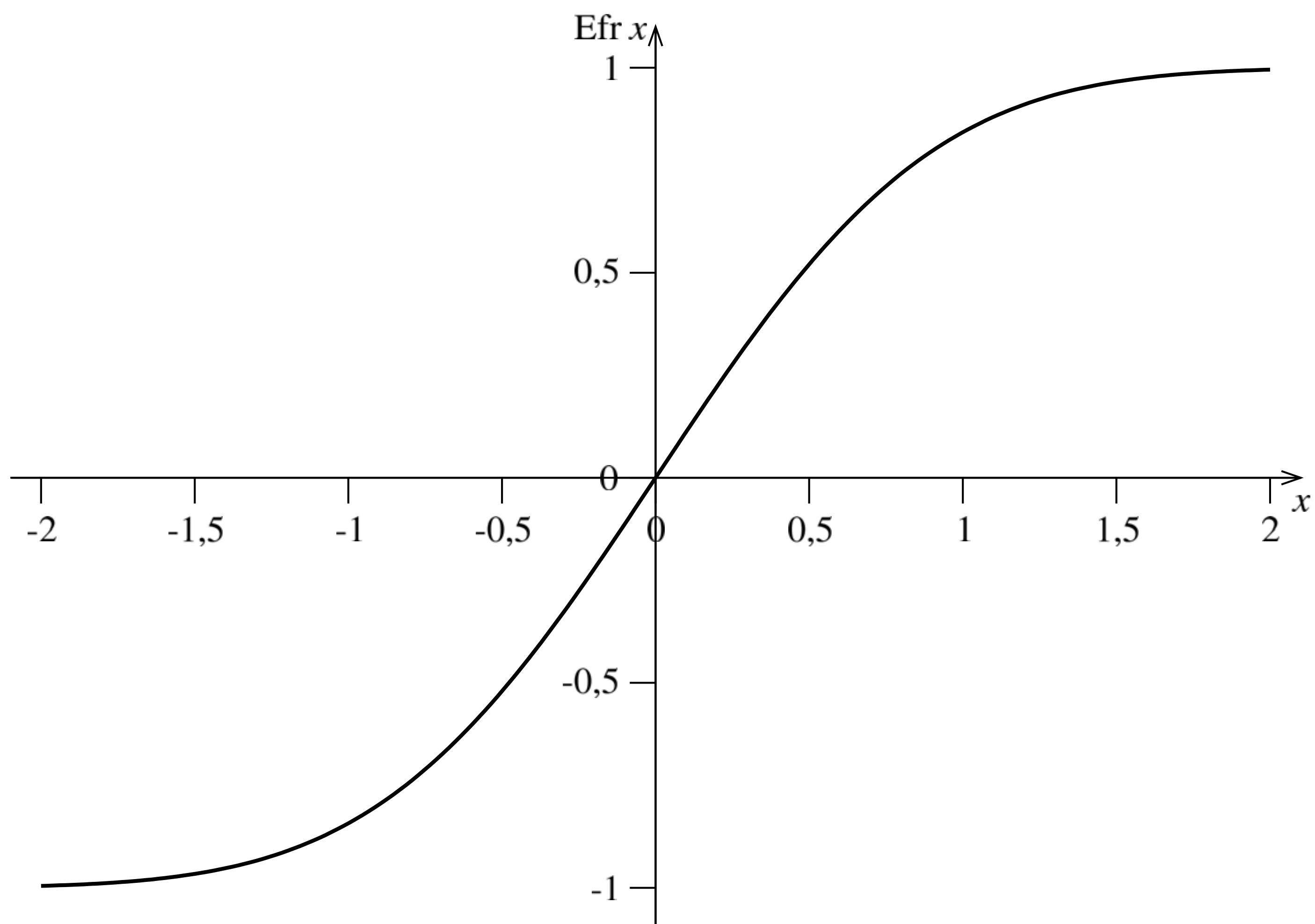


y
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

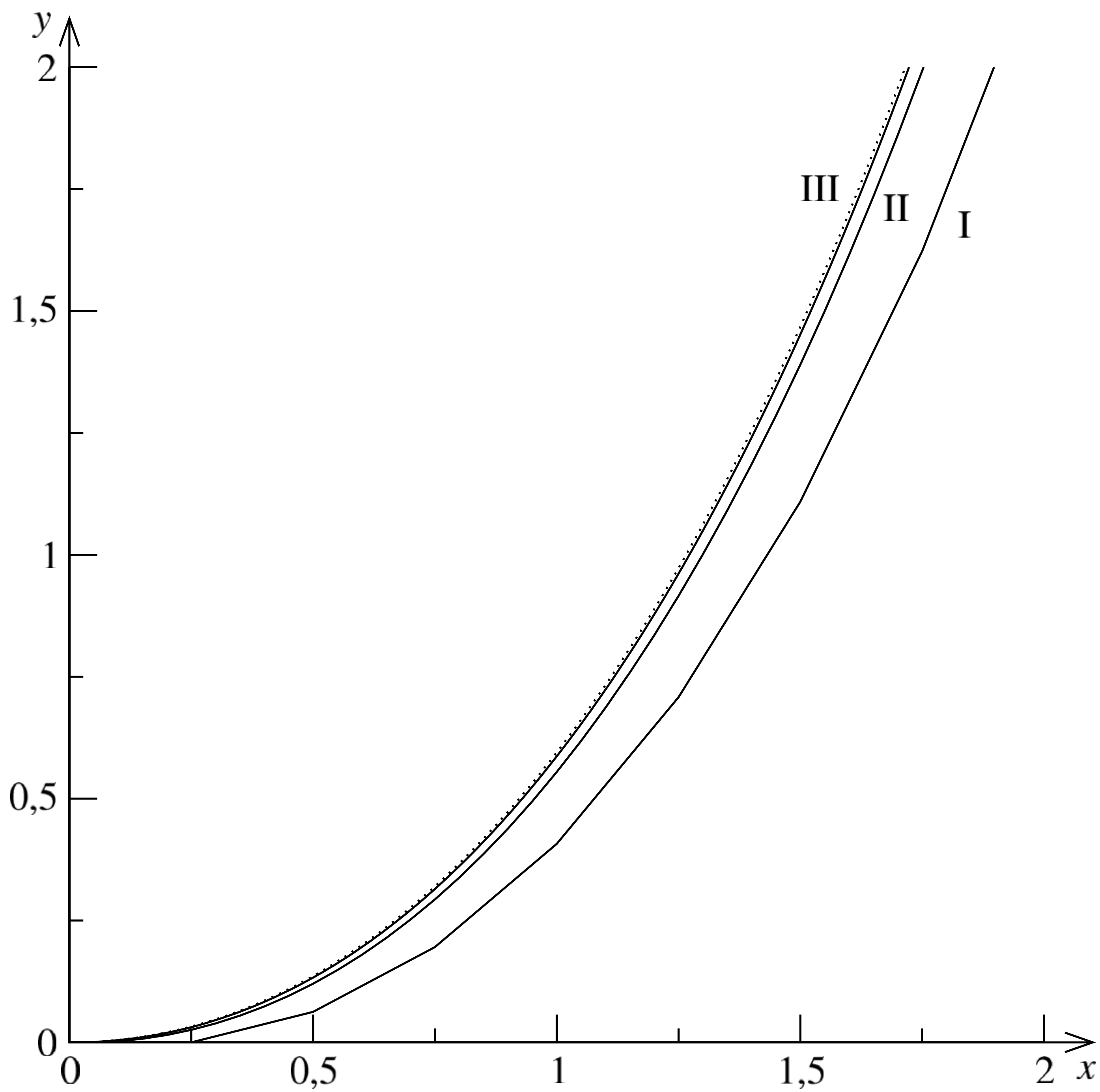

y
1
0,5
0
-0,5
-1
-π/6
0
π/6
π/3
π/2
x


y
3
2
1
0
0
0,5
1
1,5
2
x


Si x
2
1
0
0
π
2π
3π
4π
5π
6π
x



Efr x
1
0,5
0
-0,5
-1
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
x


y
2
1,5
1
0,5
0
0
0,5
1
1,5
2
x
III
II
I